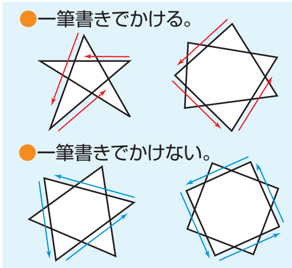
おもしろ自由研究

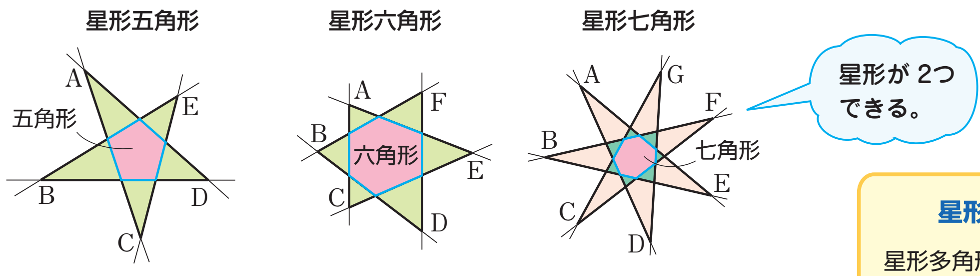
5 星形の角の和の求め方

星形の角の和には，どんなしくみがかくされているのか調べてみましょう。また，星形五角形や星形七角形は一筆書き（ひとふでが）きでかけますが，星形六角形や星形八角形のときには一筆でかけない場合があります。星形が一筆書きでかけるのはどんな条件のときか，調べてみましょう。

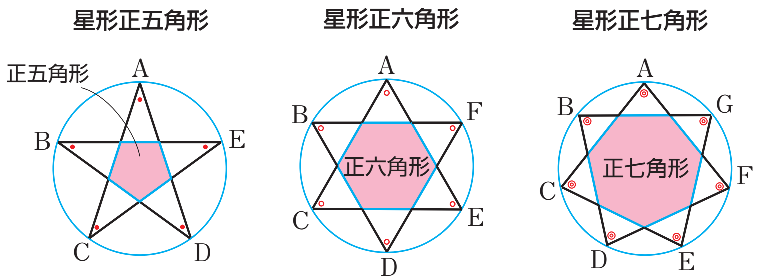


① 星形多角形

下の図のように，多角形の各辺を延長していくと，何回か交わったあと交わらなくなります。このときにできる図形を**星形多角形**といいます。星形多角形は1つだけできるとは限りません。

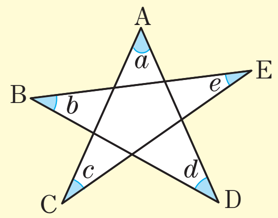


正多角形からできた星形を**星形正多角形**といいます。
また，星形正 n 角形の n 個の内角はそれぞれ等しくなります。



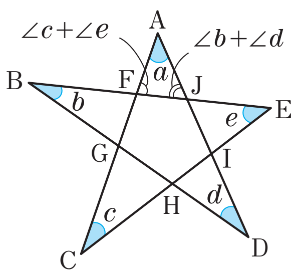
星形多角形の内角

星形多角形の内角とは，多角形の各辺の延長線でつくられた，鋭角のみをいいます。



$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$ を星形五角形の内角といいます。

② 星形五角形の角の和を求めよう（$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$）



◎ 1つの三角形に5つの角を集めることができる。

△AFJにおいて，$\angle \mathrm{AFJ}=\angle c+\angle e$

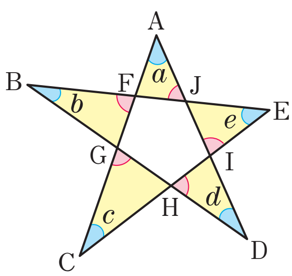
$\angle \mathrm{AJF}=\angle b+\angle d$

三角形の外角は，それととなり合わない2つの内角の和に等しい。

したがって，$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$

$=\angle a+\angle \mathrm{AFJ}+\angle \mathrm{AJF}=180^\circ$

△AFJの内角の和



〔別解〕星形五角形を，内側の五角形の各辺を延長してできた図形と考える。

内側の五角形のまわりにできた5つの三角形の内角の和の合計は

$180^\circ\times5=900^\circ$

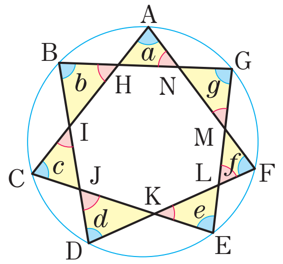
三角形の内角の和は，180°

また，五角形FGHIJの外角の和は360° だから，

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e$

$=900^\circ-360^\circ\times2=180^\circ$

③ 星形七角形の角の和を求めよう（$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f+\angle g$）



◎星形七角形を，内側の七角形の各辺を延長してできた図形と考える。

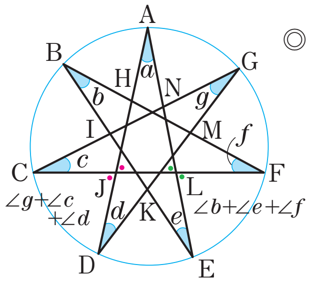
内側の七角形のまわりにできた7つの三角形の内角の和の合計は，

180°×7＝1260°　←　三角形の内角の和は，180°

また，七角形HIJKLMNの外角の和は360°だから，

$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f+\angle g$ ＝1260°－360°×2＝540°

➡ 点の結び方を変えると，星形の角の和はどうなるだろうか？



◎７つの点をAを起点として，３番目ごとに結んでできた星形七角形の角の和を考える。

3つの角を，1つに集める方法を使う。（→自由研究4）

$\angle b+\angle e+\angle f$＝∠ELF＝∠JLA（対頂角）

$\angle g+\angle c+\angle d$＝∠CJD＝∠AJL（対頂角）

$\angle a$＋∠JLA＋∠AJL＝180°

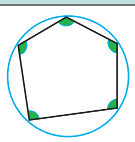
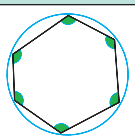
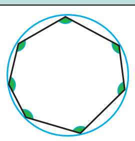
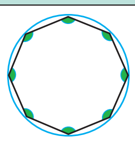
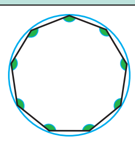
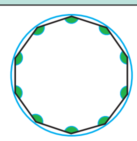
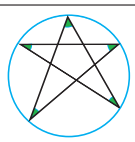
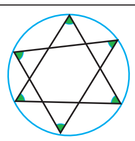
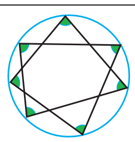
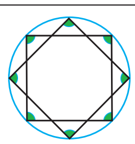
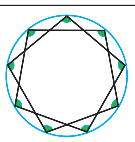
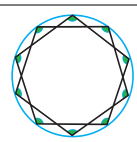
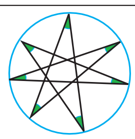
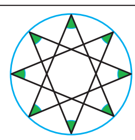
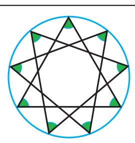
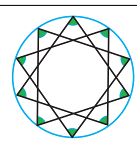
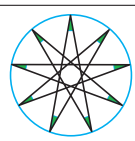
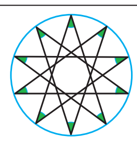
$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f+\angle g$ ＝180°　←　△AJLの内角の和

点の結び方を変えると，星形の角の和はちがってくる。

④ 星形 n 角形の角の和

円周上にn個の点をとり1つの点から出発して，2番目ごと，3番目ごと，……，p番目ごとに結んでできる星形n角形の角の和を求めてみよう。

➡ 星形の角の和を求める公式を調べると，

点の結び方	星形五角形	星形六角形	星形七角形	星形八角形	星形九角形	星形十角形	角の和の公式
1番目ごと	 540°	 720°	 900°	 1080°	 1260°	 1440°	単位：度（°） $180n-360\times1$ $=180(n-2)$
2番目ごと	 180°	 360°	 540°	 720°	 900°	 1080°	$180n-360\times2$ $=180(n-4)$
3番目ごと	２番目ごとに結んだ星形五角形と同じになる。	かくことができない。	 180°	 360°	 540°	 720°	$180n-360\times3$ $=180(n-6)$
4番目ごと	1番目ごとに結んだ星形五角形と同じになる。	２番目ごとに結んだ星形六角形と同じになる。	３番目ごとに結んだ星形七角形と同じになる。	かくことができない。	 180°	 360°	$180n-360\times4$ $=180(n-8)$
⋮							⋮
p番目ごと	❶ p番目ごとに結んだ星形n角形は，$(n-p)$番目ごとに結んでつくった星形n角形と同じ形になるので，nとpの関係は，$p<\frac{n}{2}$とする。 ❷ $\frac{n}{p}$が分数になるときは，星形n角形は一筆書きでかける。 $\frac{n}{p}$が整数になるときは，一筆書きでかけない。						$180n-360\times p$ $=180(n-2p)$